

# Probabilités

➤ **Probabilités d'un ensemble fini:**

La probabilité d'un événement  $A$  est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent, on la note  $p A$

➤ **Propriétés :**

Soit  $\Omega$  l'univers associé à une expérience aléatoire

L'événement:	Probabilités:
$A$	$0 \leq p A \leq 1$
$\bar{A}$	$p \bar{A} = 1 - p A$
$A \cup B$	$p A \cup B = p A + p B - p A \cap B$
	$p A \cup B = p A + p B$ (A et B sont incompatibles)

S'il y a **équiprobabilité** alors pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ , on a:

$$p A = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}$$

➤ **Loi d'une variable de probabilité aléatoire:**

Soit  $\Omega$  l'univers associé à une expérience aléatoire

Pour définir la loi de probabilité de la variable  $X$  sur  $\Omega$  on suit les étapes suivantes :

- 1) On détermine  $X \Omega = x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$  l'ensemble des valeurs prises par  $X$
- 2) On calcule pour chaque valeur  $x_i$  sa probabilité  $p_i = p X = x_i$  avec  $i \in \{1; 2; \dots; n\}$
- 3) On résume la loi de probabilité de la variable  $X$  par le tableau suivant :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
$p X = x_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$

➤ **Probabilité conditionnelle :**

Soit  $A$  et  $B$  deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que:  $p A \neq 0$

La probabilité de l'événement  $B$  sachant que  $A$  est réalisé est le nombre :

$$p_A B = p \frac{B}{A} = \frac{p A \cap B}{p A}$$

➤ **Événements indépendants :**

Soit  $A$  et  $B$  deux événements liés à une même expérience aléatoire

$A$  et  $B$  sont **indépendants**  $\Leftrightarrow p A \cap B = p A \times p B$

➤ **L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire:**

Soit  $X$  une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$p_{X=x_i}$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

L'espérance mathématique de la variable $X$	$E X = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \dots + x_n \times p_n$
La variance de la variable $X$	$V X = E X^2 - [E X]^2$
L'écart -type de la variable $X$	$\sigma X = \sqrt{V X}$

➤ **Epreuve répétée :**

Soit  $p$  la probabilité d'un événement  $A$ , lors d'une expérience aléatoire si on répète  $n$  fois l'épreuve dans des conditions identiques alors la probabilité de réalisation de  $A$  exactement  $k$  fois durant les  $n$  épreuves est :

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k \leq n$$

➤ **Loi binomiale :**

Soit  $p$  la probabilité d'un événement  $A$ , lors d'une expérience aléatoire on répète  $n$  fois l'épreuve dans des conditions identiques si la variable aléatoire  $X$ , égale au nombre de réalisation de  $A$  durant les  $n$  épreuves alors la loi de probabilité de la variable  $X$  est donnée par :

$$\forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\} \quad p_{X=k} = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

On dit que la variable  $X$  suit une **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$  et on a

$$E X = n \times p \quad \text{et} \quad V X = np(1-p)$$